

División de polinomios, Ruffini y factorización

Solucionario

Se muestran los pasos esenciales y el resultado final de cada ejercicio.

Ejercicio 1. División entre monomios

Dividimos término a término:

$$\frac{8x^5 - 12x^3}{4x^2} = \frac{8x^5}{4x^2} - \frac{12x^3}{4x^2} = 2x^3 - 3x.$$

Resultado: $2x^3 - 3x$

Ejercicio 2. División entre monomios

$$\frac{15x^5 - 10x^4 + 5x^2}{5x^2} = 3x^3 - 2x^2 + 1.$$

Resultado: $3x^3 - 2x^2 + 1$

Ejercicio 3. División entre monomios

$$\frac{-6x^6 + 9x^4 - 3x^2}{3x^2} = -2x^4 + 3x^2 - 1.$$

Resultado: $-2x^4 + 3x^2 - 1$

Ejercicio 4. División entre monomios

$$\frac{10x^3 - 5x^2 + 15x}{5x} = 2x^2 - x + 3.$$

Resultado: $2x^2 - x + 3$

Ejercicio 5. División exacta

Factorizamos el dividendo:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$$

Por tanto,

$$C(x) = x + 3, \quad R(x) = 0.$$

Ejercicio 6. División exacta

$$2x^2 + 3x - 5 = (x - 1)(2x + 5).$$

Por tanto,

$$C(x) = 2x + 5, \quad R(x) = 0.$$

Ejercicio 7. División con resto

Dividimos entre $x - 1$:

$$x^3 + 2x^2 - x + 5 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2) + 7.$$

Así,

$$C(x) = x^2 + 3x + 2, \quad R(x) = 7.$$

Ejercicio 8. División con término ausente

Primero escribimos el término que falta:

$$x^4 - x^3 + 0x^2 + 2x - 3.$$

Al dividir entre $x + 1$:

$$x^4 - x^3 + 2x - 3 = (x + 1)(x^3 - 2x^2 + 2x) - 3.$$

Por tanto,

$$C(x) = x^3 - 2x^2 + 2x, \quad R(x) = -3.$$

Ejercicio 9. División larga

Buscamos $C(x)$ y $R(x)$ tales que

$$3x^4 - 2x^3 + x - 4 = (x^2 + 1)C(x) + R(x).$$

El cociente obtenido es

$$C(x) = 3x^2 - 2x - 3.$$

Comprobamos:

$$(x^2 + 1)(3x^2 - 2x - 3) = 3x^4 - 2x^3 - 2x - 3.$$

La diferencia con el dividendo es $3x - 1$. Luego,

$$C(x) = 3x^2 - 2x - 3, \quad R(x) = 3x - 1.$$

Ejercicio 10. División larga

Al dividir

$$x^5 - 3x^3 + 2x - 1$$

entre $x^2 - x + 1$, se obtiene

$$C(x) = x^3 + x^2 - 3x - 4.$$

Como

$$(x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 3x - 4) = x^5 - 3x^3 + x - 4,$$

el resto es $x + 3$. Por tanto,

$$C(x) = x^3 + x^2 - 3x - 4, \quad R(x) = x + 3.$$

Ejercicio 11. División de polinomios

$$(2x - 1)(x^3 + x^2 - x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x.$$

Comparando con el dividendo, queda un resto de -2 . Así,

$$C(x) = x^3 + x^2 - x, \quad R(x) = -2.$$

Ejercicio 12. División con divisor cuadrático

Probamos con

$$C(x) = x^2 + 2x - 3.$$

Entonces,

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2x - 3) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 4x + 6.$$

La diferencia con el dividendo es $-2x + 2$. Por tanto,

$$C(x) = x^2 + 2x - 3, \quad R(x) = -2x + 2.$$

Ejercicio 13. Regla de Ruffini

Para $x - 1$ usamos $a = 1$. Con los coeficientes $1, 0, 0, -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Así,

$$C(x) = x^2 + x + 1, \quad R(x) = 0.$$

Ejercicio 14. Regla de Ruffini

Para $x - 3$ usamos $a = 3$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -3 & -11 & 6 \\ & & 6 & 9 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

Por tanto,

$$C(x) = 2x^2 + 3x - 2, \quad R(x) = 0.$$

Ejercicio 15. Ruffini con resto

Para $x - 2$ usamos $a = 2$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 2 & -5 & -4 & 13 & -6 \\ & & 4 & -2 & -12 & 2 \\ \hline & 2 & -1 & -6 & 1 & -4 \end{array}$$

Así,

$$C(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 1, \quad R(x) = -4.$$

Ejercicio 16. Teorema del resto

El resto de dividir entre $x - 2$ es $P(2)$:

$$\begin{aligned} P(2) &= 2(2^4) - 3(2^3) + 2 - 5 \\ &= 32 - 24 + 2 - 5 \\ &= 5. \end{aligned}$$

Resultado: 5

Ejercicio 17. Teorema del factor

Comprobamos $P(-2)$ porque el divisor propuesto es $x + 2$:

$$P(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4(-2) - 12 = 0.$$

Luego, $x + 2$ es factor. Además,

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x^2 + x - 6).$$

Y

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

Por tanto,

$$P(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 3).$$

Las raíces son 2, -2, -3.

Ejercicio 18. Raíces y factorización

Probamos raíces racionales. Se verifica que

$$P(1) = 0, \quad P(-2) = 0, \quad P(3) = 0.$$

Por tanto,

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3).$$

Las raíces son 1, -2, 3.

Ejercicio 19. Factorización completa

Tomamos $y = x^2$:

$$y^2 - 5y + 4 = (y - 1)(y - 4).$$

Volviendo a x :

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

Por tanto,

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

Las raíces son -2, -1, 1, 2.

Ejercicio 20. Parámetro y factorización

Para que $x - 2$ sea factor debe cumplirse $P(2) = 0$:

$$2^3 + k(2^2) - 4(2) - 8 = 0.$$

Entonces,

$$8 + 4k - 8 - 8 = 0 \implies 4k - 8 = 0 \implies k = 2.$$

El polinomio queda

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8.$$

Factorizando por agrupación:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 4x - 8 &= x^2(x + 2) - 4(x + 2) \\ &= (x + 2)(x^2 - 4) \\ &= (x - 2)(x + 2)^2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$k = 2, \quad P(x) = (x - 2)(x + 2)^2.$$